Teljes hatványok lineáris rekurzív sorozatokban

JAMES P. JONES* és KISS PÉTER**

Abstract. „Pure powers in linear recursive sequences." A linear recursive sequence G of order k is defined by the integer initial terms $G_0, G_1, \dots, G_{k-1}$, integer constansts $A_1, A_2, \dots, A_k$ and by the recursion $G_n = A_1 G_{n-1} + \dots + A_k G_{n-k}$ for $n \geq k$. In the case $k = 2$ it is known that there are only finitely many perfect powers in such sequence. In the general case, under certain hypotheses, we show that for any n there exists a number q_0, depending on G and n, such that the equation $G_n^r G_x^{q-r} = w^q$ in positive integers x, w, q, r has no solution with $x > n$, $q > q_0$ and $0 < r \leq q/2$.

Legyen $R = R(A, B, R_0, R_1)$ egy másodrendű lineáris rekurzív sorozat, melyet az

$$R_n = AR_{n-1} + BR_{n-2} \quad (n > 1)$$

rekurzió definiál, ahol A, B, R_0 és R_1 rögzített egészek. A következőkben feltesszük, hogy az R sorozat nem degenerált, azaz ha α, β jelöli az $x^2 - Ax - B = 0$ egyenlet gyökeit, akkor α/β nem egységgyök.

Az $R(1,1,0,1)$ és $R(2,1,0,1)$ speciális sorozatokat Fibonacci, illetve Pell-sorozatoknak nevezzük, és F-fel, illetve P-vel fogjuk jelölni.

Az R sorozat tagjai között előforduló teljes hatványokkal már többen foglalkoztak. A Fibonacci-sorozat tagjaira, a Fibonacci-számokra Cohn [2] és Wylie [23] megmutatták, hogy F_n akkor és csak akkor teljes négyzet, ha $n = 0, 1, 2$ vagy 12. J. C. Lagarias és D. P. Weisser [7], Pethő [12], továbbá London és Finkelstein [9,10] bizonyították, hogy F_n csak akkor teljes köb, ha $n = 0, 1, 2$ vagy 6. Ljunggren [8] egy eredményéből következik, hogy egy P_n Pell-szám csak akkor teljes négyzet, ha $n = 0, 1$ vagy 7, Pethő [13] pedig igazolta, hogy csak ezek a teljes hatvány Pell-számok. Hasonló, de általánosabb eredményeket nyertek McDaniel és Ribenboim [11], Robbins [19,20], Cohn [3,4,5] és Pethő [15]. Szép és általános eredményt igazolt Shorey és Stewart [21], valamint A. Pethő [14]: bármely nem degenerált másodrendű

* Research was supported by the National Scientific Research Council of Canada, Grant No OGP 0004525

** A kutatást (részben) az Alapítvány a Magyar Felsőoktatásért és Kutatásért és az OTKA 1641. sz. pályázata támogatta.

lineáris rekurzív sorozat csak véges számú teljes hatványt tartalmaz, és ezek effektíve meghatározhatók.

Más típusú problémákat vetett fel Ribenboim és McDaniel. Egy R sorozatban akkor mondjuk, hogy az R_m és R_n elemek azonos négyzetosztályban vannak, ha léteznek nem zérus x, y egész számok úgy, hogy $R_m x^2 = R_n y^2$ vagy, ami ezekkel ekvivalens, ha

$$R_m R_n = t^2$$

valamely t egész esetén. Egy négyzetosztályt triviálisnak nevezzük, ha csak egy elemet tartalmaz. Ribenboim [16] igazolta, hogy egy F_m Fibonacci-szám négyzetosztálya triviális, ha $m \neq 1, 2, 3, 6$ vagy 12, továbbá az $L(1, 1, 2, 1)$ Lucas sorozat L_m elemének osztálya triviális, ha $m \neq 0, 1, 3$ vagy 6. Az általánosabb $R(A, B, 0, 1)$ sorozatra, ahol A és B relatív prímek, Ribenboim és McDaniel [17], valamint Ribenboim [18] bizonyították, hogy minden négyzetosztály elemeinek száma véges.

A másodrendűnél magasabb rendű lineáris rekurzív sorozatokról kevesebbet tudunk.

Legyen $G = G(A_1, \ldots, A_k, G_0, \ldots, G_{k-1})$ egy k-adrendű lineáris rekurzív sorozat, melyet a

$$G_n = A_1 G_{n-1} + \ldots + A_k G_{n-k} \qquad (n > k - 1)$$

rekurzió definiál a nem mind nulla rögzített $A_1, \ldots, A_k$ és $G_0, \ldots,$ G_{k-1} egészekkel. Jelölje $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ az

$$x^k - A_1 x^{k-1} - \ldots - A_k = 0$$

egyenlet különböző gyökeit. Tegyük fel, hogy $\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ multiplicitása $1, m_2, \ldots, m_s$ és $|\alpha| > |\alpha_i|$ ha $i = 2, \ldots, s$. Ekkor, mint ahogy jól ismert, a sorozat tagjai

$$G_n = d\alpha^n + r_2(n)\alpha_2^n + \ldots + r_s(n)\alpha_s^n \tag{1}$$

alakban adhatók meg, ahol r_i $(i = 2, \ldots, s)$ egy $m_i - 1$ fokú polinom, melynek együtthatói és d a $Q(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ algebrai számtest elemei. Néhány feltétel mellett Shorey és Stewart [21] bizonyították, hogy a G sorozat nem tartalmaz teljes q-adik hatványt, ha q elég nagy. Ez az eredmény [6] és [22]-ből is következik néhány általánosabb tételből.

A következőkben Ribenboim és McDaniel négyzetosztály ötletét általánosítjuk k-adrendű sorozatokra és q hatvány osztályokra.

Legyenek $q > 1$ és $0 < r < q$ rögzített egész számok. Akkor mondjuk, hogy egy G sorozat G_n és G_m eleme azonos (q, r) hatványosztálynak eleme, ha $G_n^r G_m^{q-r}$ teljes q-adik hatvány, azaz ha létezik egy w egész szám úgy, hogy

$$G_n^r G_m^{q-r} = w^q.$$

Megjegyezzük, hogy r és $q-r$ hiányában a q hatványosztályok $G_n G_m = w^q$ definíciója $q > 2$ esetén nem sorolná az elemek mindegyikét osztályokba mert a reflexivitás és a tranzitivitás nem teljesülne.

Bizonyítjuk, hogy a G sorozat bármely G_n elemének (q, r) osztályában nincs olyan G_m elem, melyre $m > n$ ha q elég nagy.

Tétel. Legyen G egy k-adrendű lineáris rekurzív sorozat, mely kielégíti a fenti feltételeket. Tegyük fel, hogy $d \neq 0$ és $G_i \neq d\alpha^i$ ha $i > n_0$. Akkor bármely n egész szám esetén létezik egy n-től és G-től függő q_0 szám úgy, hogy a

$$G_n^r G_x^{q-r} = w^q \tag{2}$$

egyenletnek nincs x, w, q, r megoldása $x > n$, $q > q_0$ és $0 < r \leq q/2$ feltétellel.

A tétel bizonyításában felhasználjuk Baker [1] következő eredményét.

Lemma. Legyenek $\gamma_1, \ldots \gamma_v$ nem zérus algebrai számok és legyenek ezek magasságainak felső korlátja $M_1, \ldots M_v$. Tegyük fel, hogy $M_v \geq 4$. Legyenek továbbá $b_1, \ldots, b_{v-1}$ racionális egészek, melyek abszolút értéke legfeljebb B, és legyen b_v egy nem zérus racionális egész $|b_v| \leq B'$, $B' \geq 3$ feltétellel. Legyen

$$L = |b_1 \log \gamma_1 + \ldots + b_v \log \gamma_v|,$$

ahol a logaritmusok a főértékeket jelentik. Ekkor ha $L \neq 0$, úgy

$$L > \exp\left(-C(\log B' \log M_v + B/B')\right),$$

ahol C egy effektíve meghatározható pozitív szám, mely csak az

$$M_1, \ldots, M_{v-1}, \gamma_1, \ldots, \gamma_v$$

és v számoktól függ. (lásd Theorem 1 az [1]-ben, $\delta = 1/B'$ helyettesítéssel).

A tétel bizonyítása. Feltehetjük, hogy $n > n_0$, és n elég nagy, továbbá hogy $w \geq 4$, mert különben a tétel következik [21] vagy [6] eredményeiből, illetve az eredmények bizonyításából. Az általánosság rovása nélkül azt is feltehetjük, hogy a sorozat tagjai pozitívak.

Legyenek x, w, q és r egészek, melyekre (2) fennáll. Akkor (1) alapján

$$w^q = G_n^r d^{q-r} \alpha^{x(q-r)} \left(1 + \frac{r_2(x)}{d}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)^x + \ldots\right)^{q-r}, \tag{3}$$

amiből

$$c_1(q-r)x < q \log w < c_2(q-r)x \tag{4}$$

következik valamely $c_1, c_2 > 0$ G-től függő konstansokkal, hiszen

$$\frac{r_2(x)}{d}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)^x \to 0,$$

ha $x \to \infty$ és $\log G_n \approx n \log |\alpha| < c_3 x$. Felhasználva (3)-at, a logaritmus függvény tulajdonságai alapján valamely c_4 konstanssal

$$L = \left|\log \frac{w^q}{d^{q-r} G_n^r \alpha^{x(q-r)}}\right| < e^{-c_4 x(q-r)} \tag{5}$$

adódik. Másrészről a Lemma alapján $v = 4$, $M_4 = w$ és $B' = q$ választással

$$\begin{aligned} L &= |q \log w - (q-r) \log d - r \log G_n - x(q-r) \log \alpha| \\ &> e^{-c(\log q \log w + x(q-r)/q)} \end{aligned} \tag{6}$$

következik, ahol $c > 0$ függ az n-től. (4), (5) és (6) miatt

$$c_4 x(q-r) < c\left(\log q \log w + (q-r)x/q\right) < c_5 \log q \log w,$$

és így (4) alapján

$$q \log w < c_6 \log q \log w,$$

vagyis

$$q < c_6 \log q,$$

ami lehetetlen, ha $q > q_0 = q_0(n)$.

Ez az ellentmondás bizonyítja a tételt.

Irodalom

[1] BAKER, A., A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms II, *Acta Arithm.*, **24** (1973), 33–36.

[2] COHN, J. H. E., On square Fibonacci numbers, *J. London Math. Soc.*, **39** (1964), 537–540.

[3] J. H. E. COHN, Squares in some recurrent sequences, *Pacific J. Math.*, **41** (1972), 631–646.

[4] J. H. E. COHN, Eight Diophantine equations, *Proc. London Math. Soc.*, **16** (1966), 153–166.

[5] J. H. E. COHN, Five Diophatine equations, *Math. Scand.*, **21** (1967), 61–70.

[6] P. KISS, Differences of the terms of linear recurrences, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **20** (1985), 285–293.

[7] J. C. LAGARIAS and D. P. WEISSER, Fibonacci and Lucas cubes, *Fibonacci Quart.*, **18** (1981), 39–43.

[8] W. LJUNGGREN, Zur Theorie der Gleichung $x^2 + 1 = Dy^4$, *Avh. Norske Vid Akad. Oslo.*, **5** (1942).

[9] J. LONDON and R. FINKELSTEIN, On Fibonacci and Lucas numbers which are perfect powers, *Fibonacci Quart.*, **7** (1969) 476–481, 487, errata ibid 8 (1970) 248.

[10] J. LONDON and R. FINKELSTEIN, On Mordell's equation $y^2 - k = x^3$, Bowling Green University Press., 1973.

[11] W. L. McDANIEL and P. RIBENBOIM, Squares and double-squares in Lucas sequences, *C.R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Canada.*, **14** (1992), 104–108.

[12] A. PETHŐ, Full cubes in the Fibonacci sequence, *Publ. Math. Debrecen.*, **30** (1983), 117–127.

[13] A. PETHŐ, The Pell sequence contains only trivial perfect powers, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 60 sets, Graphs and Numbers, Budapest.*, (1991), 561–568.

[14] A. PETHŐ, Perfect powers in second order linear recurrences, *J. Number Theory.*, **15** (1982), 5–13.

[15] A. PETHŐ, Perfect powers in second order recurrences, *Topics in Classical Number Theory, Akadémiai Kiadó, Budapest.*, (1981), 1217–1227.

[16] P. RIBENBOIM, Square classes of Fibonacci and Lucas numbers, *Portugaliae Math.*, **46** (1989), 159–175.

[17] P. RIBENBOIM and W.L. MCDANIEL, Square classes of Fibonacci and Lucas sequences, *Portugaliae Math.*, **48** (1991), 469–473.

[18] P. RIBENBOIM, Square classes of $(a^n - 1)/(a - 1)$ and $a^n + 1$, *Sichuan Daxue Xunebar.*, **26** (1989), 196–199.

[19] N. ROBBINS, On Fibonacci numbers of the form px^2, where p is prime, *Fibonacci Quart.*, **21** (1983), 266–271.

[20] N. ROBBINS, On Pell numbers of the form PX^2, where P is prime, *Fibonacci Quart.*, **22** (1984), 340–348.

[21] T. N. SHOREY and C. L. STEWART, On the Diophantine equation $ax^{2t} + bx^t y + cy^2 = d$ and pure powers in recurrence sequences, *Math. Scand.*, **52** (1983), 24–36.

[22] T. N. SHOREY and C. L. STEWART, Pure powers in recurrence sequences and some related Diophatine equations, *J. Number Theory.*, **27** (1987), 324–352.

[23] O. WYLIE, In the Fibonacci series $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ the first, second and twelvth terms are squares, *Amer. Math. Monthly*, **71** (1964), 220–222.